DIE ZWEITEN GREENSCHEN FUNKTIONEN ALS KERNE VON HOMOGENEN INTEGRALGLEICHUNGEN ZWEITER ART

(TEILDRUCK)

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER PHILIPPS-UNIVERSITÄT ZU MARBURG

VORGELEGT VON

HEINRICH JUNG
AUS FRANKFURT A. M.

MARBURG 1930

DRUCK VON WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN 1930

Als Dissertation angenommen am 13. Februar 1929
Berichterstatter: Herr Professor Dr. E. R. Neumann
Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 1929

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Der zweite Teil der vorliegenden Dissertation erscheint demnächst unter dem Titel „Die Erzeugung orthogonaler Koordinatensysteme in der Ebene und im Raum durch ein Koordinatenpotential“ im Crelleschen Journal für reine und angewandte Mathematik.

Vorbemerkungen.

Als Grundgebiete sollen den folgenden Untersuchungen zunächst nur *endliche*, d. h. *ganz im Endlichen gelegene*, ebene bzw. räumliche Gebiete zugrunde gelegt werden, und zwar solche, bei denen man zwei beliebige innere Punkte durch eine Linie verbinden kann, *die nirgends die Berandung schneidet*. Es sind dies Gebiete, die von einer einzigen geschlossenen Kurve bzw. Fläche begrenzt werden (Innengebiete), und solche, deren innere Berandung aus beliebig vielen vollkommen getrennten Stücken dieser Art besteht, die alle innerhalb eines äußeren derartigen Berandungsstückes liegen (Ringgebiete). Diese Bereiche bestehen, ungenau ausgedrückt, *aus einem Stück* und sollen daher als *einfache* bezeichnet werden. Die Berandungen selbst sollen in jedem Punkt eine *bestimmte Tangente* bzw. *Tangentialebene* besitzen, ferner überall *stetige Biegung* und *endliche Krümmung* aufweisen [1]). Solche Ränder seien als *glatt* bezeichnet. Durch diese Einschränkungen sind Komplikationen in den folgenden Untersuchungen vermieden, allerdings werden hierdurch auch verhältnismäßig einfache Gebiete, wie z. B. Rechtecke, zunächst von der Betrachtung ausgeschlossen. — Die vorliegenden Untersuchungen lassen sich leicht auf Gebiete ausdehnen, die aus mehreren Stücken bestehen, doch bietet dieser Fall wenig Interesse.

Die Berandung des Grundgebiets sei mit s bezeichnet, ihre *innere* Normale mit n_s, das Grundgebiet selbst mit τ. Die Bedeutung der Differentiale ds, dn_s, $d\tau$ ist dann ohne weiteres verständlich. — Tragen Integrale keine nähere Bezeichnung, so sind sie über das *ganze* Grundgebiet bzw. über den *ganzen* Rand zu erstrecken.

$T_j^{(i)}$ sei die Grundlösung der Laplaceschen Gleichung, also $\ln \frac{1}{E_j^{(i)}}$ in der Ebene und $\frac{1}{E_j^{(i)}}$ im Raum, wenn mit $E_j^{(i)}$ die Entfernung der Punkte (i) und (j) bezeichnet wird.

Das vielfach verwendete Symbol h bedeutet in der Ebene die Zahl 1, im Raum die Zahl 2.

Alles Weitere wird an der betreffenden Stelle im Text erläutert.

§ 1. Die 2. Greenschen Funktionen.

Die Lösung der 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie (mit gegebenen Randwerten) läßt sich bekanntlich mit Hilfe der sogenannten Greenschen Funktion (hier als 1. Greensche Funktion bezeichnet) durch eine einzige Integration bestimmen. Für die 2. Randwertaufgabe, bei welcher die normale Ableitung der gesuchten Potentialfunktion

[1]) Vgl. *E. R. Neumann*, Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie, S. 2.

gegeben ist, lassen sich ähnliche Hilfsfunktionen, die 2. Greenschen Funktionen, einführen. Mit speziellen 2. Greenschen Funktionen haben sich schon *F. Neumann* und *E. R. Neumann* beschäftigt. Hier soll das Problem in voller Allgemeinheit untersucht werden.

Es sei δ_s eine stetige Funktion der Randpunkte des Grundgebiets, die der einzigen Beschränkung

$$\int \delta_s \, ds = 1$$

unterliegt. Faßt man δ_s als Dichte einer Randbelegung auf, so besitzt diese Belegung demnach die Gesamtmasse 1 [2]). — P_i sei das Potential, das jene Belegung im inneren Punkt (i) des Grundgebiets erzeugt, also

$$P_i = \int \delta_s \, T_s^{(i)} \, ds.$$

Im übrigen ist δ_s vollkommen willkürlich. Besteht der Rand aus mehreren Stücken, so ist es auch gleichgültig, wie sich δ_s auf diese verteilt.

Nun sei eine Funktion $H_j^{(i)}$ in bekannter Weise so definiert, daß sie im ganzen Grundgebiet eine eindeutige und samt ihren ersten Ableitungen stetige Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung ist, also

$$\Delta \, H^{(i)} = 0.$$

Ferner erfülle sie die Randbedingung

$$\frac{\partial H^{(i)}}{\partial n_s} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n_s} - 2h\pi\delta_s \, [3]),$$

und zwar sei speziell die *kanonische Lösung* dieser Aufgabe gemeint, d. h. diejenige Lösung, die die Nebenbedingung

$$\int H_s^{(i)} \delta_s \, ds = 0$$

befriedigt [4]). Bei variablem Punkt (i) stellt $H_j^{(i)}$ eine Funktion des Pols (i) und des Aufpunkts (j) dar.

Die Funktion

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = T_j^{(i)} - H_j^{(i)} - P_i$$

ist die gesuchte 2. *Greensche Funktion* des betrachteten Grundgebiets *in Bezug auf die gewählte Randbelegung* δ_s. Auch hier ergeben sich je nach der Wahl von δ_s *verschiedene* 2. Greensche Funktionen [5]).

Diese 2. Greenschen Funktionen $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ sind Lösungen der *Laplacesschen Differentialgleichung*, die am Rand die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathfrak{H}^{(i)}}{\partial n_s} = 2h\pi\delta_s \quad \text{und} \quad \int \mathfrak{H}_s^{(i)} \delta_s \, ds = 0$$

---

[2]) δ_s kann stellenweise negativ sein. Es treten also auch negative Massen auf.

[3]) Die für ein endliches Gebiet notwendige Nebenbedingung $\int \frac{\partial H^{(i)}}{\partial n_s} ds = 0$ ist hierbei erfüllt. — Je nach der Wahl von δ_s erhält man *verschiedene* Funktionen $H_j^{(i)}$.

[4]) Hierdurch wird die in $H_j^{(i)}$ zunächst noch unbestimmte additive Konstante festgelegt.

[5]) *F. Neumann* hat bei einfachen Grundgebieten δ_s konstant angenommen, während *E. R. Neumann* (Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, Jablonowski-Preisschrift, Leipzig 1912) dafür die Dichte ϱ_s der natürlichen Belegung, d. i. die Ladungsdichte im elektrostatischen Gleichgewicht, die im ganzen Grundgebiet ein *konstantes Potential* erzeugt, gesetzt hat.

erfüllen. Sie sind samt ihren ersten Ableitungen, im ganzen Grundgebiet *eindeutig* und *stetig, ausgenommen im Pol* (i), wo sie sich wie die Grundlösung $T_j^{(i)}$ der Laplaceschen Differentialgleichung verhalten.

Die Kenntnis der Randwerte irgendeiner 2. Greenschen Funktion genügt, um die 2. Randwertaufgabe für beliebige stetige Randwerte g_s, sofern diese nur die Nebenbedingung

$$\int g_s \, ds = 0 \,^{6}).$$

erfüllen, mit einer einzigen Integration zu lösen. Die Lösung stellt sich dar in der Gestalt

$$\text{(P)} \qquad G_i = -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(i)} g_s \, ds,$$

und zwar ergibt sich speziell die *kanonische Lösung in Bezug auf* δ_s, d. h. diejenige, die der Nebenbedingung

$$\int G_s \delta_s \, ds = 0$$

genügt.

Die Formel (P) wird in bekannter Weise hergeleitet durch Anwendung des Greenschen Satzes,

$$\int (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, d\tau = -\int \left(\varphi_s \frac{\partial \psi}{\partial n_s} - \psi_s \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} \right) ds,$$

auf das Grundgebiet, indem man für φ die gesuchte Potentialfunktion G_i setzt, für ψ einmal unter Ausschluß des Pols (i) durch einen kleinen Kreis bzw. eine entsprechende Kugel die Grundfunktion $T_j^{(i)}$, das zweite Mal die Funktion $H_j^{(i)}$, und schließlich die zweite so erhaltene Gleichung von der ersten subtrahiert.

Berechnet man G_i unter Zugrundelegung derselben Randwerte für die normale Ableitung mit Hilfe *verschiedener* 2. *Greenscher Funktionen*, indem man verschiedene Randbelegungen δ_s verwendet, so sind, da δ_s in die Nebenbedingung $\int G_s \delta_s \, ds = 0$ eingeht, die so gewonnenen Lösungen ein- und derselben Randwertaufgabe im allgemeinen *nicht* einander gleich. Auf Grund eines bekannten potentialtheoretischen Satzes unterscheiden sie sich um eine *additive Konstante.*

Da $H_j^{(i)}$ selbst auch eine kanonische Lösung der 2. Randwertaufgabe in Bezug auf δ_s ist, und zwar mit den Randwerten

$$g_s = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n_s} - 2h\pi \delta_s$$

der normalen Ableitung, kann man auch diese Funktion durch die Formel (P) ausdrücken. Durch Vertauschung von (i) und (j) ergibt sich eine entsprechende Darstellung von $H_i^{(j)}$. Weiter erhält man:

$$H_j^{(i)} - H_i^{(j)} =$$

$$= -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \left(T_s^{(j)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n_s} - T_s^{(i)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial n_s} \right) ds + \frac{1}{2h\pi} \cdot \int \left(H_s^{(j)} \frac{\partial H^{(i)}}{\partial n_s} - H_s^{(i)} \frac{\partial H^{(j)}}{\partial n_s} \right) ds + P_j - P_i \,.$$

Nach dem Greenschen Satz verschwinden rechts beide Integrale (bei dem ersten ist der Pol (i) wieder in bekannter Weise auszuschließen), sodaß übrig bleibt:

$$H_j^{(i)} - H_i^{(j)} = P_j - P_i.$$

Da P_i und P_j im allgemeinen verschieden sind, ist hieraus zu ersehen, daß die Funktion

---

[6]) Diese muß nach bekannten Prinzipien bei *endlichen Gebieten* stets erfüllt sein.

$H_j^{(i)}$ im allgemeinen *nicht* symmetrisch ist in den Punkten (i) und (j), hingegen erweist sich $H_j^{(i)} + P_i$ und somit auch *die 2. Greensche Funktion* $\mathfrak{H}_j^{(i)} = T_j^{(i)} - H_j^{(i)} - P_i$ als *symmetrisch* in Pol und Aufpunkt.

Hierdurch rechtfertigt sich nachträglich die Hinzufügung des zunächst willkürlich erscheinenden Potentials P_i in der Definition der 2. Greenschen Funktion $\mathfrak{H}_j^{(i)}$.

Wählt man speziell δ_s als die *natürliche Belegung* ϱ_s des Grundgebiets, so hat P_i bei jeder Lage von (i) denselben Wert. Dann ist auch $H_j^{(i)}$ *symmetrisch.* — In dieser Tatsache liegt die innere Begründung für gewisse besonders einfache Eigenschaften, die die von E. R. Neumann [7]) mit Hilfe der natürlichen Belegung ϱ_s definierte 2. Greensche Funktion vor allen anderen mit beliebigem δ_s zu erlangenden 2. Greenschen Funktionen auszeichnet.

§ 2. Die 2. Greenschen Funktionen als Kerne von Integralgleichungen bei endlichen Grundgebieten.

Faßt man eine 2. Greensche Funktion $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ eines endlichen Grundgebietes auf als Funktion der *beiden* variablen Punkte (i) und (j), so kann man sie verwenden als Kern der symmetrischen Integralgleichung

$$\varphi_i - \varkappa \cdot \int \mathfrak{H}_j^{(i)} \varphi_j \, d\tau_j = 0 \text{ [8])}.$$

Dann ist zu untersuchen, welche Differentialgleichung und welche Randbedingung die Eigenfunktionen φ erfüllen.

Es ist bekannt, daß die Eigenfunktionen derjenigen Integralgleichung, die die 1. *Greensche Funktion* als Kern besitzt, die Differentialgleichung $\Delta\varphi + 2h\pi\varkappa\varphi = 0$ und die 1. *Randbedingung* $\varphi_s = 0$ erfüllen. Man könnte nun vermuten, daß bei unserer Integralgleichung dementsprechend die Eigenfunktionen φ derselben Differentialgleichung und der 2. *Randbedingung* unterworfen sind, nämlich $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 0$. Dies ist jedoch nicht der Fall. A. Kneser [9]) hat nämlich diejenige Integralgleichung bestimmt, deren Eigenfunktionen die besagte Differentialgleichung mit der 2. Randbedingung erfüllen. Als Kern erhielt er eine Funktion $K_j^{(i)}$, die statt der Laplaceschen Gleichung die Differentialgleichung

$$\Delta K^{(i)} = a$$

erfüllt, worin a eine zunächst noch unbestimmte Konstante darstellt, die aber sicher von 0 verschieden ist. Ferner genügt $K_j^{(i)}$ der 2. Randbedingung und verhält sich im Pol (i) wie die Greenschen Funktionen. Da der Kern einer Integralgleichung durch die Gesamtheit der Eigenfunktionen *eindeutig* bestimmt ist, ist hiermit gezeigt, daß der oben erwähnte Zusammenhang *nicht* besteht, denn der Knesersche Kern ist von allen 2. Greenschen Funktionen *verschieden.*

Überblickt man die Sachlage bei der 1. Greenschen Funktion und den von Kneser behandelten Fall, so sieht man, daß *sich die Eigenfunktionen am Rand ebenso verhalten wie der Kern der zugehörigen Integralgleichung.* Das legt nun die Vermutung nahe, daß in unserem Fall, da eine 2. *Greensche Funktion* den Kern bildet, die Eigenfunktionen am

[7]) Vgl. *E. R. Neumann,* Beiträge.

[8]) Der Index j deutet an, daß sich die Integration auf den variablen Punkt (j) bezieht.

[9]) *A. Kneser,* Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik, 2. Aufl., Braunschweig 1922, S. 154.

Rand dieselben Bedingungen erfüllen wie diese, *also* $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 2h\pi\delta_s$ *und* $\int \varphi_s \delta_s ds = 0$. In der Tat werden die folgenden Untersuchungen zum Teil auf diese Randbedingungen führen, *jedoch ergeben sich daneben auch Eigenfunktionen mit anderen Randeigenschaften.*

Zunächst ist es praktisch, in der Integralgleichung

$$\varkappa = \frac{k^2}{2h\pi}$$ [10])

zu setzen und der Kürze halber fortan k als Eigenwert zu bezeichnen. Die Integralgleichung lautet dann:

(J) $$\varphi_i - \frac{k^2}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_j^{(i)} \varphi_j \delta\tau_j = 0.$$

Mit Hilfe der bekannten Poissonschen Formel

$$\Delta \int T_j^{(i)} \varphi_j d\tau_j = -2h\pi \varphi_i$$ [11])

und der Definition der Funktionen $H_j^{(i)}$ und $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ erhält man unmittelbar für die Eigenfunktionen die Differentialgleichung

(D) $$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

Am Rand ist

$$\varphi_s = \frac{k^2}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_j^{(s)} \varphi_j d\tau_j = \frac{k^2}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(j)} \varphi_j d\tau_j.$$

Berücksichtigt man die Randeigenschaften von $\mathfrak{H}_j^{(i)}$, so ergeben sich hieraus direkt die beiden Beziehungen

(R_1) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = a\,\delta_s,$$

(R_2) $$\int \varphi_s \delta_s ds = 0,$$

worin

$$a = k^2 \int \varphi\, d\tau$$

eine Konstante ist, die sich mit Hilfe der Differentialgleichung (D) und des Gaußschen Satzes $\left(\int \Delta\varphi\, \delta\tau = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} ds\right)$ auch als Randintegral darstellen läßt:

$$a = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} ds.$$

Bei der Ableitung von (R_1) wird unter dem Integral differenziert, bei (R_2) müssen die Integrationen über τ und s vertauscht werden. Da $\mathfrak{H}_s^{(j)}$ in gewissen Randelementen $d\tau_j$ unstetig wird, muß die Zulässigkeit dieser Operationen noch bewiesen werden. Dies bietet jedoch keinerlei Schwierigkeit, wenn man den Rand zunächst durch eine in seiner unmittelbaren Nähe laufende Kurve bzw. Fläche ausschließt und hernach diese mehr und mehr dem Rand nähert.

Sind umgekehrt die Differentialgleichung (D) und die Randbedingungen (R_1) und (R_2) gegeben, so läßt sich hieraus die Integralgleichung (J) ableiten. Dies gelingt leicht,

---

[10]) $\varkappa$ ist nämlich *positiv*. Dies ergibt sich aus der bekannten Formel $\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau + \int \varphi \Delta\varphi\, d\tau = -\int \varphi_s \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} ds$ und den weiter unten abgeleiteten Beziehungen (D), (R_1), (R_2).

[11]) Die Differentiation bezieht sich auf den Punkt (i).

indem man im Greenschen Satz für φ eine Lösung von (D), (R_1) und (R_2) setzt, für ψ einmal unter Ausschluß des Pols (i) die Grundlösung $T_j^{(i)}$, das andere Mal die Funktion $H_j^{(i)}$, und schließlich die so erhaltenen Gleichungen subtrahiert.

Die Eigenfunktionen φ lassen sich *in zwei Gruppen* teilen, je nachdem die Konstante a *gleich* oder *verschieden* von 0 ist.

a) Ist $a = 0$ [12]), so ergeben sich die Randbedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 0 \text{ und } \int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0 .$$

Die zu dieser Gruppe gehörigen Eigenfunktionen erfüllen *die 2. Randbedingung*. Jedoch sind es wegen der Zusatzbedingung $\int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0$ *nicht alle* Lösungen der Differentialgleichung (D), die dieser Randbedingung genügen. — Die Eigenfunktionen dieser Gruppe sind auch Eigenfunktionen *der Kneserschen Integralgleichung*. Man hat also hier den bemerkenswerten Fall, daß zwei *verschiedene* Integralgleichungen *in einem Teil ihrer Eigenfunktionen übereinstimmen*.

In den Eigenfunktionen ist noch ein Normierungsfaktor unbestimmt. Er soll in der üblichen Weise festgesetzt werden, d. h. so, daß $\int \varphi^2 \, d\tau = 1$ ist.

b) Ist $a \neq 0$, so werde der Normierungsfaktor so gewählt, daß

$$a = 2h\pi$$ [13])

ist. Es ergeben sich dann die Randbedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 2h\pi\delta_s \quad \text{und} \quad \int \varphi_s \delta_s \, ds = 0 .$$

Die Eigenfunktionen dieser Gruppe haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre normale Ableitung am Rand *proportional der Belegung* δ_s ist. Sie besitzen bei der gewählten Normierung *dieselben* Randeigenschaften wie die zugehörige 2. Greensche Funktion, d. h. *wie der Kern der Integralgleichung*.

Zusammenfassung: Legt man der Betrachtung ein *einfaches endliches* Gebiet zugrunde, so sind die Eigenfunktionen der Integralgleichung (J), deren Kern gebildet wird von der *zu einer Randfunktion* δ_s *gehörigen* 2. *Greenschen Funktion* des Grundgebiets, zugleich Lösungen der Differentialgleichung (D), welche sich nach den Randbedingungen in die oben erwähnten beiden Gruppen teilen:

a) mit den Randbedingungen $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 0$ und $\int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0$,

b) mit den Randbedingungen $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 2h\pi \, \delta_s$ und $\int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0$.

Umgekehrt sind auch alle Lösungen der Differentialgleichung (D), die diese Randbedingungen erfüllen, zugleich Eigenfunktionen der Integralgleichung (J).

§ 3. Unendliche Grundgebiete.

Unter einem *unendlichen* Grundgebiet sei ein solches Gebiet verstanden, das im Gegensatz zu einem endlichen Grundgebiet den *unendlichfernen Punkt* der Ebene bzw. des Raumes als *inneren* Punkt enthält. Die *ganz im Endlichen gelegene* Berandung sei ebenso beschaffen wie bei endlichen Gebieten. Ferner sollen wieder nur *einfache* Grundgebiete betrachtet werden.

---

[12]) Daß dieser Fall eintreten kann, wird später durch Beispiele gezeigt.

[13]) Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß diese Art der Normierung mit der bei Integralgleichungen üblichen im allgemeinen *nicht* übereinstimmt.

Sind der Pol (a) und der Aufpunkt (α) Punkte eines solchen Gebiets und n_s die ins Innere des Grundgebiets weisende Randnormale, so ist nach *E. R. Neumann* die 2. Greensche Funktion definiert durch

$$\mathfrak{H}_\alpha^{(a)} = T_\alpha^{(a)} - H_\alpha^{(a)},$$

wobei $H_\alpha^{(a)}$ eine *harmonische Funktion* [14]) des Grundgebiets ist, *die am Rand der Bedingung*

$$\frac{\partial H^{(a)}}{\partial n_s} = \frac{\partial T^{(a)}}{\partial n_s}$$

genügt. $H_\alpha^{(a)}$ ist *symmetrisch* in (a) und (α), ebenso $\mathfrak{H}_\alpha^{(a)}$.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Integralgleichung

$$\varphi_a - \varkappa \cdot \int \mathfrak{H}_\alpha^{(a)} \varphi_\alpha \, d\tau_\alpha = 0$$

außer der trivialen identisch verschwindenden Lösung *keine* Eigenfunktion φ besitzt. Der Beweis wird so geführt, daß man zunächst die Existenz von Eigenfunktionen postuliert und dann zeigt, daß diese identisch 0 sein müssen.

Mit Hilfe der Formel

$$H_\alpha^{(a)} = -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(a)} \frac{\partial T^{(\alpha)}}{\partial n_s} \, ds,$$

die sich wegen der Symmetrie von $H_\alpha^{(a)}$ direkt aus der bekannten Beziehung

$$H_\alpha^{(a)} = -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(\alpha)} \frac{\partial T^{(a)}}{\partial n_s} \, ds$$ [15])

ergibt, erhält man durch einfache Überlegungen, daß sich

$$\frac{1}{T_\alpha^{(o)}} \mathfrak{H}_\alpha^{(a)} \quad \text{dem Wert 1}$$

nähert, wenn (α) ins Unendliche rückt und (o) einen beliebigen, aber festen Punkt der Ebene bzw. des Raumes [16]) darstellt.

Hieraus ist leicht zu ersehen, daß das in der Integralgleichung auftretende Integral

$$\int \mathfrak{H}_\alpha^{(a)} \varphi_\alpha \, d\tau_\alpha$$

nur dann existiert, wenn im Unendlichen

$$E^{2+\beta} \int \varphi \, d\omega \quad \textit{endlich}$$

ist, wobei E die *Entfernung* des ins Unendliche wandernden Aufpunkts (α) von dem festen Punkt (o) darstellt, β eine unbestimmte, *wirklich positive*, aber beliebig kleine Zahl bezeichnet und $d\omega$ den zum Zentrum (o) gehörigen ebenen oder räumlichen Gesichtswinkel des Elementes eines das Unendliche ausschließenden Kreises bzw. einer entsprechenden Kugel mit dem Mittelpunkt (o) bedeutet, auf welcher die Werte von φ ausgebreitet zu denken sind [17]).

Da $\mathfrak{H}_\alpha^{(a)}$ abgesehen von der Unstetigkeit im Pol (a) eine harmonische Funktion des Grundgebiets ist, verschwindet die Ableitung von $\mathfrak{H}_\alpha^{(a)}$ nach einer beliebigen Richtung $\mathfrak{r}$ im Unendlichen derart, daß

$$E^h \frac{\partial \mathfrak{H}^{(a)}}{\partial \mathfrak{r}_\alpha} \quad \text{endlich}$$

---

[14]) Vgl. *E. R. Neumann*, Beiträge.

[15]) Beiträge, S. 64.

[16]) (o) braucht nicht im Grundgebiet zu liegen.

[17]) Das Integral ist über der *ganzen Kreis* bzw. die *ganze Kugel zu* erstrecken.

bleibt. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Integralgleichung, daß auch

$$E^{1+\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial r_\alpha} \quad \textit{endlich}$$

ist im Unendlichen, wenn γ eine *wirklich positive* Zahl darstellt, die andererseits *sicher kleiner als* β ist ($\beta > \gamma > 0$). Zum Beweis schließt man das Unendliche aus durch eine Hilfsberandung Σ, nimmt an dieser die normale innere Ableitung (wobei die Differentiation unter dem Integral erlaubt ist) und läßt diese Berandung sich nachträglich unbegrenzt ausdehnen. —

Wie bei endlichen Gebieten erfüllen die Eigenfunktionen, falls sie existieren, die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + 2h\pi\varkappa\varphi = 0.$$

Bei der Herleitung dieses Resultats muß allerdings erst untersucht werden, ob die *Poissonsche Formel*

$$\Delta\int T_\alpha^{(a)}\varphi_\alpha\, d\tau_\alpha = -2h\pi\varphi_a$$

auch auf *unendliche Gebiete* anwendbar ist. Geht man von den Differenzenquotienten aus, die der Differentialoperation Δ entsprechen, so läßt sich mit elementaren Mitteln zeigen, daß der Beitrag, den das Unendliche zur linken Seite der Formel liefert, schon bei den Differenzenquotienten verschwindet, also um so mehr bei Δ, und zwar in der Ebene wie im Raum, wenn sich $\int\varphi\, d\omega$ *im Unendlichen verhält wie* $E^{1-\delta}$, wobei δ wieder eine beliebige, aber wirklich positive Zahl darstellt. Letztere Bedingung ist aber nach den obigen Ausführungen erfüllt, und damit *ist die Gültigkeit der Poissonschen Formel bewiesen.*

Mittels der Hilfsberandung Σ läßt sich, wenn man das Verhalten der Eigenfunktionen im Unendlichen beachtet, ebenso wie bei endlichen Gebieten zeigen, daß der Eigenwert $\varkappa$ *positiv* ist [18]). Wieder sei

$$\varkappa = \frac{k^2}{2h\pi}$$

gesetzt und fortan die Größe k als Eigenwert bezeichnet. k ist auf jeden Fall *reell.*

A. Sommerfeld [19]) hat nun gezeigt, daß für *beliebige reelle* Werte von k eine Funktion existiert von folgenden Eigenschaften:

1. *Diese Funktion* $\mathfrak{U}$ *genügt* außer im Pol (a) im ganzen unendlichen Grundgebiet *der Differentialgleichung*

$$\Delta\mathfrak{U} + k^2\mathfrak{U} = 0,$$

d. h. derselben, der auch die Eigenfunktionen genügen.

2. *In der nächsten Umgebung von* (a) *verhält sich* $\mathfrak{U}$ *wie* $-\frac{1}{2h\pi}T_\alpha^{(a)}$.

3. *Auf dem Rande* s *erfüllt* $\mathfrak{U}$ *die 2. Randbedingung*

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial n_s} = 0\ ^{20}).$$

---

[18]) Vgl. Fußnote 10, S. 93.

[19]) *A. Sommerfeld*, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1912, S. 303 ff. — Sommerfelds Greensche Funktionen sind nicht mit unseren Greenschen Funktionen zu verwechseln und seien daher als *Sommerfeldsche Funktionen* bezeichnet.

[20]) In Sommerfelds Beispiel steht statt dessen die 1. Randbedingung $\mathfrak{U}_s = 0$. Doch gilt für $\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial n_s} = 0$ wörtlich dasselbe.

4. *Im Unendlichen verschwindet* $\mathfrak{U}$ *derart, daß*

$$E^{\frac{h}{2}}\,\mathfrak{U} \quad \textit{endlich}$$

bleibt.

5. Ist n_Σ die *innere* Normale der oben erwähnten Hilfsberandung Σ, *so gilt* bei unbegrenzter Ausdehnung von Σ *die Beziehung*

$$\lim E^{\frac{h}{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_\Sigma} - ik\,\mathfrak{U}_\Sigma\right) = 0.$$

Hieraus ergibt sich, daß im Unendlichen auch

$$E^{\frac{h}{2}}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_\Sigma} \quad \textit{endlich}$$

ist.

Die Existenz dieser Funktionen $\mathfrak{U}$ ist nach Sommerfeld *physikalisch evident*, da sie bestimmten, in der Natur vorkommenden Schwingungszuständen entsprechen. Der strenge mathematische Existenzbeweis ist erst in wenigen Spezialfällen erbracht. Bei einfachen Berandungen läßt sich die Funktion $\mathfrak{U}$ berechnen, so z. B. beim Außengebiet des Kreises.

Wendet man den Greenschen Satz an auf die Eigenfunktionen φ und *diejenige Sommerfeldsche Funktion* $\mathfrak{U}$, die *zu dem betreffenden Eigenwert* k gehört, d. h. die *dieselbe* Differentialgleichung erfüllt wie φ, indem man unter Ausschluß des Pols (a) das Gebiet zwischen s und Σ zugrundelegt, so ergibt sich bei unbegrenzter Ausdehnung von Σ:

$$\varphi_a = -\int (\varphi\,\Delta\mathfrak{U} - \mathfrak{U}\,\Delta\varphi)\,d\tau - \int\left(\varphi_s\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_s} - \mathfrak{U}_s\frac{\partial \varphi}{\partial n_s}\right)ds -$$
$$- \lim\int\left(\varphi_\Sigma\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_\Sigma} - \mathfrak{U}_\Sigma\frac{\partial \varphi}{\partial n_\Sigma}\right)d\Sigma.$$

Hierin verschwindet das erste Integral rechts wegen der Differentialgleichung, der φ und $\mathfrak{U}$ genügen, das zweite wegen der Randbedingungen längs s, schließlich der Limes wegen des Verhaltens beider Funktionen und ihrer Ableitungen im Unendlichen, wenn man für Σ speziell den oben erwähnten Kreis um (o) bzw. die entsprechende Kugel wählt. Da diese Betrachtungen für *jede Lage des Pols* (a) gelten, muß somit φ identisch verschwinden.

Damit ist das im Anfang dieses Paragraphen gesteckte Ziel erreicht. Außer der trivialen Nullösung gibt es bei unendlichen Grundgebieten *keine* Eigenfunktionen unserer Integralgleichung.

§ 4. Beispiele.

1. Kreis (Radius R),

$$\delta_s = \varrho_s = \frac{1}{2\pi R} \quad \text{(Spezialfall von F. Neumann und E. R. Neumann).}$$

Bei Verwendung der *gewöhnlichen Polarkoordinaten* ergibt sich mit Hilfe der bekannten Entwicklung (für $r > r_i$)

$$\ln\frac{1}{E_j^{(i)}} = \ln\frac{1}{r} + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{r_i}{r}\right)^\nu \cos\left[\nu\,(\vartheta - \vartheta_i)\right]$$

nach einfachen Rechnungen die 2. Greensche Funktion $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ als folgende Fourierreihe:

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \ln\frac{R}{r} + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{r_i}{R}\right)^\nu\left[\left(\frac{R}{r}\right)^\nu + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu\right]\cos\left[\,\nu\,(\vartheta - \vartheta_i)\right]$$
$$\text{(für } r > r_i).$$

Die *orthogonalisierten* und nach den Vorschriften des § 2 *normierten* Eigenfunktionen erhält man ebenfalls auf bekannte Weise, und zwar:

Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \begin{cases} a_{\nu\varkappa} J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r)} \cos(\nu\vartheta) \\ b_{\nu\varkappa} J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r)} \sin(\nu\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

worin die Faktoren $a_{\nu\varkappa}$ und $b_{\nu\varkappa}$ durch *gewöhnliche Normierung* zu bestimmen sind, die Eigenwerte $k_{\nu\varkappa}$ die *positiven Lösungen* der Gleichungen

$$J'_{\nu(k_{\nu\varkappa} R)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

darstellen und $J_{\nu(x)}$ die *Besselsche Funktion ν-ter Ordnung* bedeutet.

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = -\frac{1}{k_{0\varkappa} R J'_{0(k_{0\varkappa} R)}} J_{0(k_{0\varkappa} r)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

worin die Eigenwerte $k_{0\varkappa}$ die *positiven Lösungen* von

$$J_{0(k_{0\varkappa} R)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

sind.

Hieraus ist ersichtlich, daß im allgemeinen die $k_{0\varkappa}$ *einfache*, die $k_{\nu\varkappa}$ hingegen *zweifache* Eigenwerte sind [21]).

Daß alle diese Eigenfunktionen tatsächlich die Integralgleichung mit dem Kern $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ befriedigen, läßt sich leicht direkt nachweisen [22]). Ferner sieht man unschwer, daß sie alle in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzen.

Setzt man für den Kern $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ und seine Iterierten die bekannten *bilinearen Entwicklungen nach den Eigenfunktionen* [23]) an, so ergeben sich, da der Kern und die Iterierten als *einfache Fourierreihen* dargestellt sind, die Eigenfunktionsreihen aber als solche Fourierreihen, *deren Koeffizienten ihrerseits aus unendlichen nach Besselschen Funktionen fortschreitenden Reihen bestehen*, durch Vergleich beider Darstellungen interessante Resultate über letztere Koeffizientenreihen. Beim Kern selbst ist allerdings gewisse Vorsicht nötig, da $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ im Pol (i) *unstetig* ist und die Gültigkeit der bilinearen Entwicklung auf anderem Wege nachgewiesen werden muß [24]). *Bei den Iterierten hingegen besteht keinerlei Vorbehalt.* Für den Kern und die erste Iterierte ergeben sich folgende Reihen (für $r > r_i$):

Kern:

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{0(k_{0\varkappa} r)} J_{0(k_{0\varkappa} r_i)}}{k_{0\varkappa}^2 J'^2_{0(k_{0\varkappa} R)}} \approx \frac{R^2}{2} \cdot \ln \frac{R}{r}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots) \qquad \sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r)} J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r_i)}}{(k_{\nu\varkappa}^2 R^2 - \nu^2) J^2_{\nu(k_{\nu\varkappa} R)}} \approx \frac{1}{4\nu} \left(\frac{r_i}{R}\right)^\nu \left[\left(\frac{R}{r}\right)^\nu + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu\right]$$

---

[21]) *Mehr als 2-fache* Eigenwerte treten nur dann auf, wenn 2 *oder mehrere* der Gleichungen

$$J_{0(kR)} = 0 \text{ und } J'_{\nu(kR)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

von *ein und demselben Wert k* gleichzeitig befriedigt werden. Die Möglichkeit hierfür ist nicht ohne weiteres abzustreiten, aber es ist dies nach den bisherigen Untersuchungen über Besselsche Funktionen *sehr unwahrscheinlich.*

[22]) Die hierzu nötigen Formeln finden sich in Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, Braunschweig 1900, § 69.

[23]) Zu beachten ist, daß alle Eigenfunktionen gemäß $\int \varphi^2 \, d\tau = 1$ zu normieren sind.

[24]) Deshalb steht auch weiter unten das Zeichen $\approx$ statt des Gleichheitszeichens.

1. *Iterierte:*

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{0(k_{0\varkappa}r)}\,J_{0(k_{0\varkappa}r_i)}}{k_{0\varkappa}^4\,J_0'^2{}_{(k_{0\varkappa}R)}} = \frac{R^2}{8}\left[(R^2-r^2)-(r^2+r_i^2)\cdot\ln\frac{R}{r}\right]$$

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{1(k_{1\varkappa}r)}\,J_{1(k_{1\varkappa}r_i)}}{k_{1\varkappa}^2(k_{1\varkappa}^2R^2-1)\,J_{1(k_{1\varkappa}R)}^2} = \frac{r_i}{8}\left[r\left(2+\ln\frac{R}{r}\right)-\frac{1}{4R^4}(r^2+r_i^2)\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\,J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r_i)}}{k_{\nu\varkappa}^2(k_{\nu\varkappa}^2R^2-\nu^2)\,J_{\nu(k_{\nu\varkappa}R)}^2} =$$

$$= \frac{1}{8\nu^2}\left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^\nu\left(\frac{r^2}{\nu-1}-\frac{r_i^2}{\nu+1}\right)+\frac{1}{\nu+1}\frac{(rr_i)^\nu}{R^{2\nu}}\left(\frac{\nu^2-2}{\nu-1}R^2-\frac{\nu}{2}(r^2+r_i^2)\right)\right]$$

$$(\nu=2,3,\ldots).$$

In gleicher Weise ergeben sich bei den höheren Iterierten ähnliche Reihen, auf deren linker Seite im Nenner nur die Exponenten von $k_{0\varkappa}$, $k_{1\varkappa}$ und $k_{\nu\varkappa}$ außerhalb der Klammern bei der n-ten Iterierten die Werte $2n$, $2n-2$ und $2n-2$ besitzen und die rechten Seiten aus den Fourierentwicklungen der Iterierten zu entnehmen sind.

Schließlich ist es noch interessant, unsere Eigenfunktionen φ zu vergleichen mit *den Eigenfunktionen der Kneserschen Integralgleichung*, d. h. den Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, die *der 2. Randbedingung* $\dfrac{\partial u}{\partial n_s} = 0$ genügen. Letztere sind:

Gruppe α):

$$u_{\nu\varkappa} = \begin{cases} a_{\nu\varkappa}\,J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\cos(\nu\vartheta) \\ b_{\nu\varkappa}\,J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\sin(\nu\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\ldots\\ \varkappa=1,2,\ldots\end{pmatrix},$$

wobei $k_{\nu\varkappa}$ die positiven Lösungen von

$$J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R)} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\ldots\\ \varkappa=1,2,\ldots\end{pmatrix}$$

darstellen,

Gruppe β):

$$u_{0\varkappa} = a_{0k}\,J_{0(k_{0\varkappa}r)} \qquad (\varkappa=1,2,\ldots),$$

worin $k_{0\varkappa}$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J'_{0(k_{0\varkappa}R)} = 0 \qquad (\varkappa=1,2,\ldots)$$

sind.

Die Funktionen der Gruppe α) erfüllen die Nebenbedingung $\int u_s\,\delta_s\,ds = 0$. Sie sind *identisch* mit den Eigenfunktionen $\varphi_{\nu\varkappa}$ *unserer Gruppe* a). Die Gruppe β) hingegen enthält nur solche Eigenfunktionen der Kneserschen Integralgleichung, die jene Nebenbedingung *nicht* erfüllen und somit *keine* Eigenfunktionen unserer Integralgleichung sind. An ihre Stelle treten die Funktionen $\varphi_{\nu\varkappa}$ *der Gruppe* b).

Die *Sommerfeldsche Funktion* $\mathfrak{U}$ für das *Außengebiet des Kreises* stellt sich dar durch die Reihe (für $r < r_a$)

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\,{}^{(1)}H_{\nu(kr_a)}\left(J_{\nu(kr)} - J'_{\nu(kR)}\frac{{}^{(1)}H_{\nu(kr)}}{{}^{(1)}H'_{\nu(kR)}}\right)\cos[\nu(\vartheta-\vartheta_a)],$$

wobei $J_{\nu(x)}$ die *Besselschen* und ${}^{(1)}H_{\nu(x)}$ die *ersten Hankelschen Funktionen ν-ter Ordnung* sind.

2. Konzentrischer Kreisring (innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2),

$$\delta_s = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi R_2} & \text{auf dem Außenrand} \\ 0 & \text{auf dem Innenrand.} \end{cases}$$

2. *Greensche Funktion* (für $r > r_i$):

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \ln \frac{R}{r} + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu} \left[\frac{(rr_i)^{2\nu} + R_1^{2\nu}(r^{2\nu} + r_i^{2\nu}) + (R_1 R_2)^{2\nu}}{(rr_i)^\nu (R_2^{2\nu} - R_1^{2\nu})} + \left(\frac{r_i}{r}\right)^\nu \right] \cos\left[\nu(\vartheta - \vartheta_i)\right].$$

Eigenfunktionen:

Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \alpha_{\nu\varkappa}\left(Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)} - J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, Y_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\right) \begin{cases} \cos(\nu\vartheta) \\ \sin(\nu\vartheta) \end{cases}$$

$$= \beta_{\nu\varkappa}\left(Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)} - J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)}\, Y_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\right) \begin{cases} \cos(\nu\vartheta) \\ \sin(\nu\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

worin die $k_{\nu\varkappa}$ zu bestimmen sind aus den Gleichungen

$$Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)} - J_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}^{25})$$

und $\alpha_{\nu\varkappa}$ bzw. $\beta_{\nu\varkappa}$ Konstanten darstellen, die durch gewöhnliche Normierung festzulegen sind [26]).

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = -\frac{1}{k_{0\varkappa}R_2\left(Y'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, J'_{0(k_{0\varkappa}R_2)} - J'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, Y'_{0(k_{0\varkappa}R_2)}\right)} \cdot \left(Y'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, J_{0(k_{0\varkappa}r)} - J'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, Y_{(k_{0\varkappa}r)}\right),$$

wobei die $k_{0\varkappa}$ aus

$$Y'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, J_{0(k_{0\varkappa}R_2)} - J'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, Y_{0(k_{0\varkappa}R_2)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

bestimmt werden.

3. Kugel (Radius R),

$$\delta_s = \varrho_s = \frac{1}{4\pi R^2}.$$

Bei gewöhnlichen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ ergibt sich mit Hilfe der bekannten Kugelfunktionsentwicklung (für $r > r_i$)

$$\frac{1}{E_j^{(i)}} = \frac{1}{r} + \sum_1^\infty \frac{r_i^\nu}{r^{\nu+1}} \left\{ P_{\nu(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu(\cos\vartheta)} + \sum_1^\nu 2\,\frac{(\nu - j)!}{(\nu + j)!}\, P_{\nu j(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos\left[j(\varphi - \varphi_i)\right] \right\}^{27})$$

die 2. *Greensche Funktion* (für $r > r_i$) in der Form

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty \left[\frac{\nu + 1}{\nu} \frac{(rr_i)^\nu}{R^{2\nu+1}} + \frac{r_i^\nu}{r^{\nu+1}} \left\{ P_{\nu(\cos\vartheta_i)} P_{\nu(\cos\vartheta)} + \sum_1^\nu 2\,\frac{(\nu - j)!}{(\nu + j)!}\, P_{\nu j(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \cos\left[j(\varphi - \varphi_i)\right] \right\} \right].$$

---

[25]) Hierdurch erweisen sich beide Darstellungen der $\varphi_{\nu\varkappa}$ als *identisch*.

[26]) Die $Y_{\nu\varkappa}$ sind irgendwelche von den $J_{\nu\varkappa}$ *linear unabhängige* Lösungen der *Besselschen Differentialgleichung*, z. B. die *Besselschen Funktionen zweiter Art*.

[27]) Hierin sind $P_{\nu(x)}$ die bekannten *Legendreschen Polynome*, während mit $P_{\nu j(x)}$ *die Funktionen* $(\sqrt{1-x^2})^j \cdot \dfrac{d^j P_{\nu(x)}}{dx^j}$ bezeichnet sind.

Eigenfunktionen:
Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \begin{cases} a_{\nu\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} P_{\nu(\cos\vartheta)} \\ a_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos(j\varphi) \\ b_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \sin(j\varphi) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots, \nu \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

wobei die $k_{\nu\varkappa}$ zu bestimmen sind aus den Gleichungen

$$J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} R)} - 2\, k_{\nu\varkappa} R\, J'_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} R)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = -\frac{1}{k_{0\varkappa}(\sqrt{R})^3 J'_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} R)}} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} r)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

worin die $k_{0\varkappa}$ durch

$$J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} R)} = 0$$

geliefert werden.

Es sind hiernach im allgemeinen die $k_{0\varkappa}$ *einfache* und die $k_{\nu\varkappa}$ $(2\nu+1)$-*fache* Eigenwerte [28]).

4. Konzentrische Kugelschale (Radien R_1, R_2),

$$\delta_s = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi R_2^2} & \text{am Außenrand} \\ 0 & \text{am Innenrand.} \end{cases}$$

2. *Greensche Funktion* (für $r > r_i$):

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \sum_1^\infty \left[\frac{\nu^2 (R_1 R_2)^{2\nu+1} + \nu(\nu+1) R_1^{2\nu+1} (r^{2\nu+1} + r_i^{2\nu+1}) + (\nu+1)^2 (r\, r_i)^{2\nu+1}}{\nu(\nu+1)\,(R_1^{2\nu+1} + R_2^{2\nu+1})\,(r\, r_i)^{\nu+1}} + \frac{r_i^\nu}{r^{\nu+1}} \right] \cdot$$

$$\cdot \{ P_{\nu(\cos\vartheta_i)} P_{\nu(\cos\vartheta)} + \sum_1^\nu 2 \frac{(\nu-j)!}{(\nu+j)!} P_{\nu j(\cos\vartheta_i)} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos[j(\varphi - \varphi_i)] \}.$$

Eigenfunktionen:
Gruppe a):

$$\left.\begin{cases} \alpha_{\nu\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[1, -(\nu+\frac{1}{2})]\, J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [1, \nu+\frac{1}{2}]\, J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)}\} P_{\nu(\cos\vartheta)} \\ \alpha_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[1, -(\nu+\frac{1}{2})]\, J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [1, \nu+\frac{1}{2}]\, J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)}\} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos(j\varphi) \\ \alpha_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[1, -(\nu+\frac{1}{2})]\, J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [1, \nu+\frac{1}{2}]\, J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)}\} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \sin(j\varphi) \end{cases}\right\} \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots, \nu \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$= \left\{\begin{cases} \beta_{\nu\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[2, -(\nu+\frac{1}{2})]\, J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [2, \nu+\frac{1}{2}]\, J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)}\} P_{\nu(\cos\vartheta)} \\ \beta_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[2, -(\nu+\frac{1}{2})]\, J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [2, \nu+\frac{1}{2}]\, J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)}\} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos(j\varphi) \\ \beta_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[2, -(\nu+\frac{1}{2})]\, J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [2, \nu+\frac{1}{2}]\, J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)}\} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \sin(j\varphi) \end{cases}\right.$$

[28]) Bezüglich *mehr als* 2-*facher* Eigenwerte gilt Ähnliches wie beim Kreisgebiet.

worin wegen allzu großer Länge der Formeln folgende Abkürzungen eingeführt sind:

$$[1, n] \text{ für } J_{n(kR_1)} - 2k\,R_1\,J'_{n(kR_1)}$$
$$[2, n] \text{ für } J_{n(kR_2)} - 2k\,R_2\,J'_{n(kR_2)}.$$

Die Eigenwerte $k_{\nu\varkappa}$ sind zu bestimmen aus den Gleichungen

$$[1, -(\nu+\tfrac{1}{2})]\,[2, \nu+\tfrac{1}{2}] - [1, \nu+\tfrac{1}{2}]\,[2, -(\nu+\tfrac{1}{2})] = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = \frac{2}{\sqrt{R_2}\,\{[1, -\tfrac{1}{2}]\,[2, \tfrac{1}{2}] - [1, \tfrac{1}{2}]\,[2, -\tfrac{1}{2}]\}}\,\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \{[1, -\tfrac{1}{2}]\,J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa}r)}\,[1, \tfrac{1}{2}]\,J_{-\frac{1}{2}(k_{0\varkappa}r)}\}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

wobei die $k_{0\varkappa}$ zu berechnen sind aus

$$[1, -\tfrac{1}{2}]\,J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa}R_2)} - [1, \tfrac{1}{2}]\,J_{-\frac{1}{2}(k_{0\varkappa}R_2)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Die Beispiele 2—4 bieten prinzipiell gegenüber dem Kreisgebiet nichts Neues. Es sei daher der Kürze halber gestattet, sich hier mit diesen knappen Angaben zu begnügen.

Eingegangen im Juli 1929.

Inhalt des zweiten Teils

A. Orthogonale Koordinatensysteme in der Ebene.

§ 1. Das Koordinatenpotential für Innengebiete.
§ 2. Die funktionentheoretische Methode.
§ 3. Ringgebiete.
§ 4. Beispiele.

B. Orthogonale Koordinatensysteme im Raum.

§ 5. Das Koordinatenpotential und die Koordinatenflächen.
§ 6. Beispiel: Rotationsflächenscharen mit gemeinsamer Achse.

C. Anwendung auf die Eigenfunktionen derjenigen Integralgleichung, deren Kern aus einer 2. Greenschen Funktion des Grundgebiets besteht.

Lebenslauf

Ich, Philipp Julius Heinrich Jung, wurde am 8. Oktober 1902 als Sohn des im Weltkrieg gefallenen Rechtsanwalts Dr. jur. Philipp Julius Jung und seiner Ehefrau Auguste Hermine geb. Hessenberg zu Frankfurt a. M. geboren. Ich besitze die preußische Staatsangehörigkeit und bin evangelisch-lutherischen Bekenntnisses.

Von Ostern 1909 bis Ostern 1911 besuchte ich die Holbein-Mittelschule zu Frankfurt a. M., trat alsdann in die 1. Vorschulklasse der Sachsenhäuser Oberrealschule zu Frankfurt a. M. ein und verließ diese Anstalt nach bestandener Reifeprüfung Ostern 1921.

Nach abgeschlossener Schulbildung studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften, und zwar im Sommer- und Winter-Semester 1921/22 in Frankfurt a. M., vom Sommer-Semester 1922 bis zur Meldung zum Staatsexamen (Sommer-Semester 1925) in Marburg.

Das Staatsexamen bestand ich in Marburg Ende des Sommer-Semesters 1926.

Zwischendurch war ich aushilfsweise als Assistent an der Lehrkanzel für Mathematik der Deutschen Technischen Hochschule zu Brünn, Tschecho-Slovakei, tätig (März bis Juni 1926).

Vom 1. Dezember 1926 bis zum 30. September 1929 war ich mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft am Geologisch-paläontologischen Institut der Universität Marburg beschäftigt.

Das Rigorosum bestand ich in Marburg am 12. und 13. Februar 1929.

Seit 1. April 1930 halte ich mich als Notgemeinschaftsstipendiat am Geophysikalischen Institut der Universität Göttingen auf.

Meine akademischen Lehrer waren

in Frankfurt a. M.: v. Braun, Brill, Drevermann, Epstein, Gerlach, F. Hahn, Landé, Madelung, F. Mayer, Wachsmuth,

in Marburg: v. Auwers, Berek, Fraenkel, Grüneisen, Heiler, Hensel, Jaensch, Krafft, Krollpfeiffer, Neumann, E. Otto, Rehmke, Schaefer, Schindewolff, F. A. Schulze, Senftleben, Stephani, Strecker, Take †, Thiel, Wedekind, Weigel, Weyrich, Zühlke.

Ihnen allen bin ich zu großem Dank verpflichtet, besonders aber Herrn Professor Dr. Neumann-Marburg für die vielfachen wertvollen Anregungen, die er mir bei der Abfassung der vorliegenden Dissertation zuteil werden ließ und für das rege Interesse, das er an ihrem Fortgang nahm.